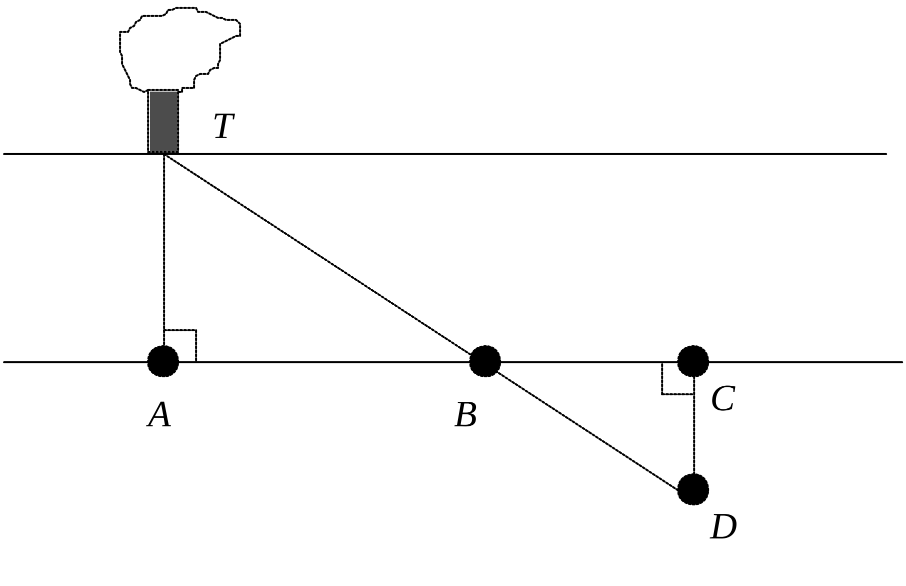
Matematikkens mysterier
- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

2. Trigonometri



Hvad er afstanden fra flodbred til flodbred?

2. Trigonometri og geometri

Indhold

Anvendte symboler

Opgaver er mærket med symbolerne:

L: let opgave eller øveopgave. Der er et facit i facitlisten
M: mellemsvær opgave
S: svær opgave

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

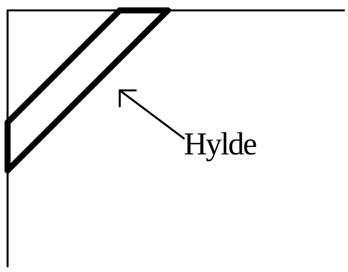
FS: sætningen findes i formelsamlinge
LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

2.0 Indledning

I dette afsnit vil du hovedsageligt lære om trigonometri eller trekantsmålinger. I al sin enkelhed bliver du præsenteret for en række metoder til at beregne vinkler og sidelængder i en trekant. Vores indgangsvinkel vil være den klassiske geometri, hvilket vil sige, at vi laver alle beregninger direkte på vores figurer uden at indlægge et koordinatsystem. Dette er i modsætning til den analytiske geometri, som introduceres i næste kapitel.

Hvorfor lære det?

En ven af forfatterne stødte på følgende problem: Han skulle lave en fjernsynshylde:



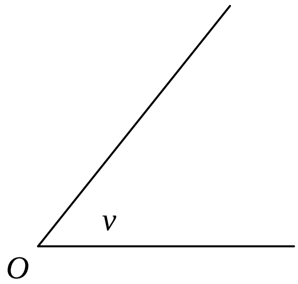
Nu var træet meget dyrt, så han ønskede at vide med 100 % sikkerhed, at hylden passede, efter at han havde savet den til. Hvad brugte han som hjælp? Jo, en stakkels matematiklærer, som måtte regne det hele ud for ham via telefonen! For at forfatterne skal slippe for denne situation fremover, skal I lære at lave beregningerne selv!

Et lille græsk-kursus

Mange ord indenfor matematikken kommer oprindeligt fra græsk. Derfor er der en god idé at kunne lidt græsk:

> *meter* betyder faktisk *måler* på græsk. Tænk bare på alle de instrumenter, du bruger i fysik - et ampere*meter* måler strøm, et volt*meter* måler spænding, et foto*meter* måler lysstryke osv. Selv længdeenheden hedder en *meter*.
>
> *metri* betyder *måling* - og det er jo også næsten det samme ord som *meter*.
>
> *geo* betyder *jord*, (*geo*grafi, *geo*logi), så betydningen af ordet *geometri* er faktisk *jordmåling*, og det var faktisk også det, man først brugte geometrien til i oldtiden.
>
> En *trigon* er en trekant, så *trigonometri* betyder *trekantsmåling*.

2.1 Vinkler



En vinkel v angives ved dens toppunkt O samt venstre og højre ben.

Dens størrelse angives ved et gradtal:

$$10°,\ 20°,\ 19°.$$

Den rette vinkel er på 90° og tegnes normalt som på figuren til venstre.

Den lille firkant betyder altså, at vinklen er en ret vinkel.

Ud fra den rette vinkel kan alle vinkler fastlægges, f.eks. er en vinkel på 9° en tiendedel af en vinkel på 90°.

Idet en ret linie kan opfattes som sammensat af to rette vinkler, og en cirkel som sammensat af 4 rette vinkler, så får man gradtallet for en ret linie og for en cirkel til henholdsvis 180° og 360°.

Indenfor geometrien anvender man en lidt speciel notation for vinkler og liniestykker:

Punkter betegnes med store bogstaver: *A, B, C*, ...

Liniestykker betegnes med to bogstaver. F.eks. er AB liniestykket, som starter i punktet A og ender i punktet B.

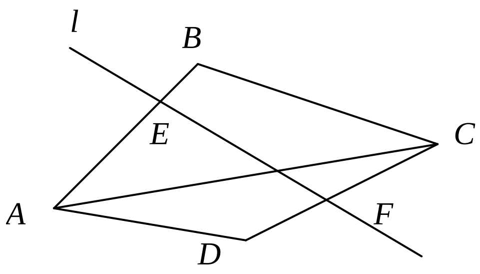
Længden af liniestykket AB betegnes som $|AB|$.

Linier betegnes med små bogstaver: l, m, n, ...

Vinkler kan betegnes på to måder - enten som et bogstav: A, B, ..., eller som et vinkelsymbol efterfulgt af tre bogstaver: $\angle ABC$. Den sidste notation virker altid, mens den første kun kan bruges, hvis der ikke er tvivl. $\angle ABC$ betyder, at vi betragter den vinkel, hvis *toppunkt* er i punktet *B*, og hvis *ben* er liniestykkerne *AB* og *BC*. Man kan altså læse $\angle ABC$ som: 'Vi starter i punktet *A*, går hen til toppunktet *B* og videre til punktet *C*'.

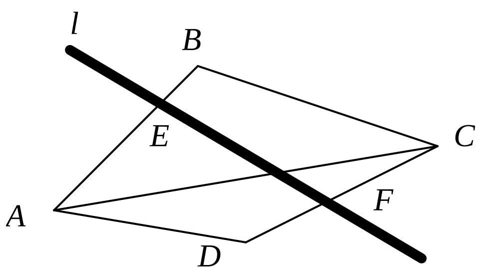
Nu er der sikkert nogle, som sidder og undrer sig over, hvad forskellen mellem et liniestykke og en linie er. Forskellen er, at en linie fortsætter uendeligt langt ud til begge sider, mens liniestykket kun er den del af linien, som befinder sig **mellem** de to endepunkter.

Eksempel

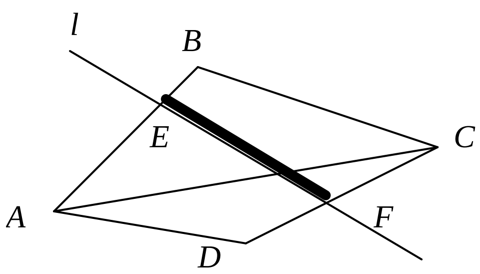


Her er en typisk geometrisk tegning, omend den måske er lidt indviklet.

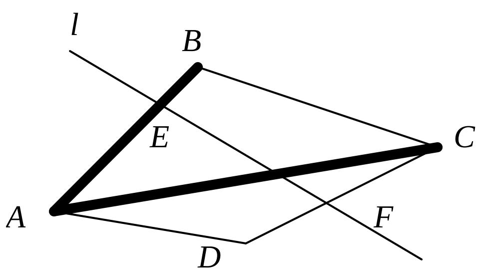
På de følgende tegninger er nogle af elementerne i denne tegning fremhævet.



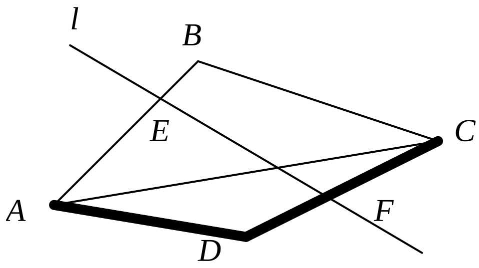
linien *l*



liniestykket *EF*, som altså ikke er det samme som linie *l*

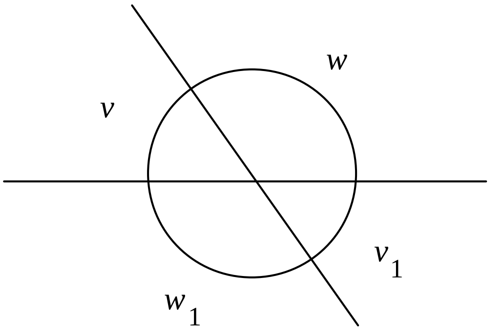


vinklen $\angle BAC$



vinklen D, som man også kunne kalde $\angle ADC$ - men det er kortere at skrive D, og der er jo ingen tvivl mulig.

Vinkel mellem to linier



Når to linier krydser hinanden, så dannes der 4 vinkler. På figuren til venstre har vi kaldt disse vinkler for v, w, v_1 og w_1. Vinklerne v og v_1 kaldes for *modstående vinkler*. w og w_1 er også modstående vinkler.

Sætning 1

Modstående vinkler ved to skærende linier er lige store:

$$v = v_1 \qquad \text{og} \qquad w = w_1$$

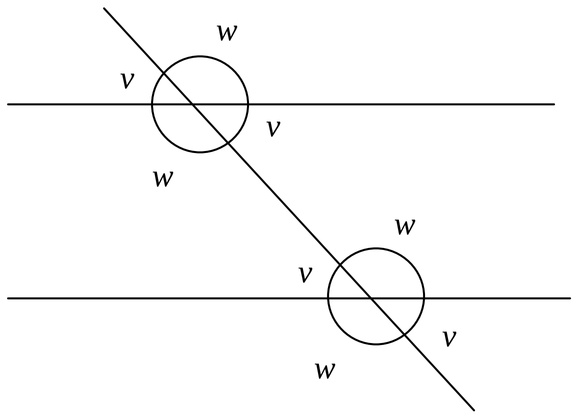
Bevis:

Da vinkelsummen på en linie er 180° får man

$$\left.\begin{aligned} v + w &= 180^\circ \\ v_1 + w &= 180^\circ \end{aligned}\right\Downarrow \quad \Rightarrow \quad v = v_1$$

og

$$\left.\begin{aligned} v + w &= 180^\circ \\ v + w_1 &= 180^\circ \end{aligned}\right\Downarrow \quad \Rightarrow \quad w = w_1$$



Når to parallelle linier skærer af en tredie linie, så får man situationen som på tegningen. Som man ser, er alle vinklerne mærket *v* lige store, og alle vinklerne *w* er også lige store.

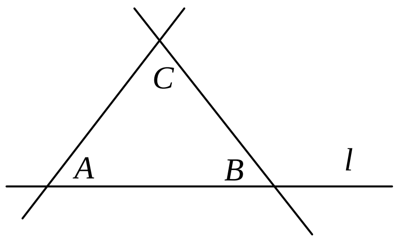
En matematiker ville dog ikke nøjes med at se på tegningen, men kræve et **bevis** for, at vinklerne er ens.

Vinkelsummer

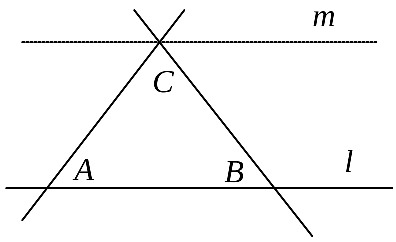
Vi afslutter med at bevise et par sætninger, som du nok kender:

> **Sætning 2 (LS)**
>
> Vinkelsummen i en trekant er 180°

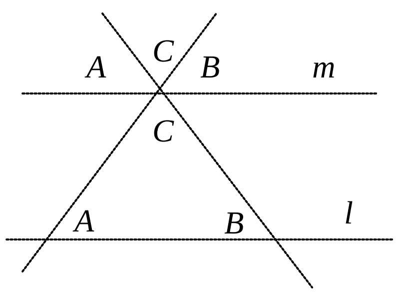
Bevis:



Betragt trekanten *ABC*, hvor alle siderne er blevet forlænget til linier.



Parallelforskyd linien *l* til linien *m*, som skal gå gennem punktet *C*.



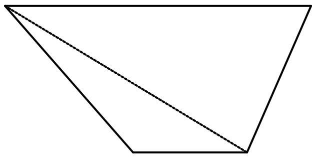
Ved at bruge bemærkningen om parallelle linier, der skæres af en tredie linie, kan vi nu se, at vinklerne mellem den nye linie *m* og de forlængede trekantsider er *A* og *B*.
Vi kan nu se, at de tre vinkler *A*, *B* og *C* tilsammen udgør en ret linie. Da gradtallet

for en ret linie netop er 180°, så må vinkelsummen i trekanten altså være 180°.

Sætning 3 (LS)

Vinkelsummen i en firkant er på 360°.

Bevis:



En vilkårlig firkant kan altid opdeles i to trekanter. Vinkelsummen i en firkant er derfor lig med vinkelsummen i to trekanter, altså 360°.

Opgaver

1.L Bevis, at vinkelsummen i en *femkant* er 540°.

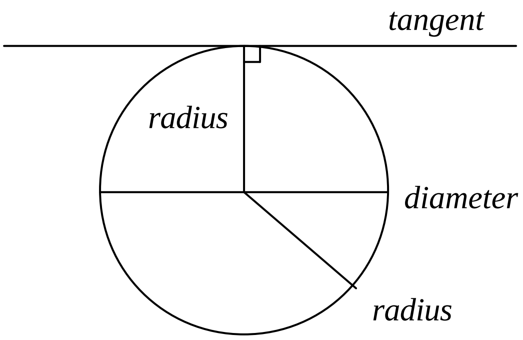
2.L Kan du finde et generelt udtryk for vinkelsummen i en *n*-kant?

3.L Ud over det sædvanlige vinkelmål, hvor en ret vinkel er på 90°, så anvender man to andre vinkelmål, *nygrader*, hvor en ret vinkel er på 100^g, og *radianer*, hvor en ret vinkel er på $\frac{\pi}{2}$ radianer. (Nygrader bruges sjældent af matematikere, men meget af f.eks. landmålere. Radianer bruges meget af matematikere, og du skal senere komme til at høre mere om radianer).

a) Hvor mange nygrader er en ret linie og en cirkel?
b) Hvor mange radianer er en ret linie og en cirkel?
c) Kan du finde en formel, så man kan 'oversætte' et gradtal til nygrader og til radianer?

2.2 Trekanter og cirkler

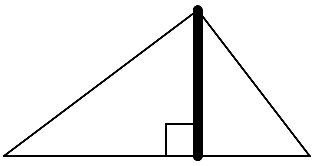
Her er en opsummering af forskellige begreber og sætninger i forbindelse med trekanter og cirkler:



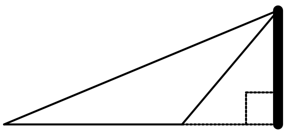
En *diameter* forbinder to punkter på cirkelperiferien og går gennem centrum.

En *radius* går fra centrum til periferien.

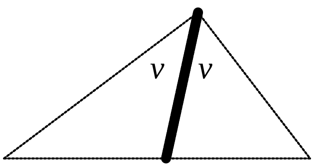
En *tangent* rører kun cirkelperiferien i ét punkt. Den står altid vinkelret på radius'en.



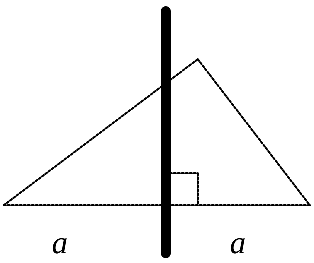
En *højde* i en trekant går fra en vinkelspids vinkelret ned på den modstående side.



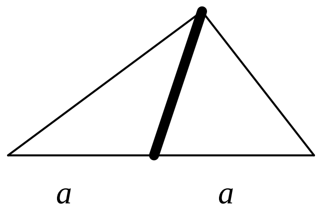
Højden kan dog godt falde udenfor trekanten.



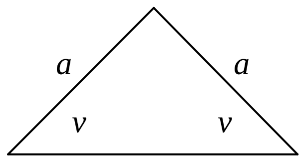
En *vinkelhalveringslinie* deler en vinkel i to lige store halvdele.



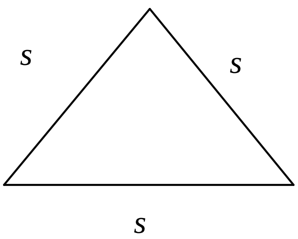
En *midtnormal* deler en side i to lige store stykker. Den står vinkelret på siden.



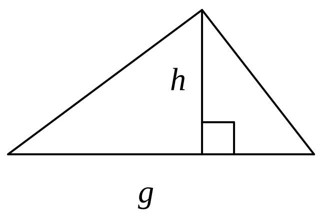
En *median* går fra midtstykket af en side til den modstående vinkelspids.



I en *ligebenet* trekant er der to lige lange sider, *a*, og to lige store vinkler, *v*.



I en *ligesidet* trekant er alle tre sider lige lange. Alle tre vinkler er også lige store - de har nemlig alle gradtallet 60 °.



Arealet af en trekant er givet ved

$$T = \frac{1}{2}hg$$

hvor h er længden af en højde, og g længden af den tilsvarende grundlinie.

(Bemærk, at vi bruger symbolet T for trekantens areal. Det er fordi vi normalt vil bruge A som betegnelsen for en af trekantens spidser).

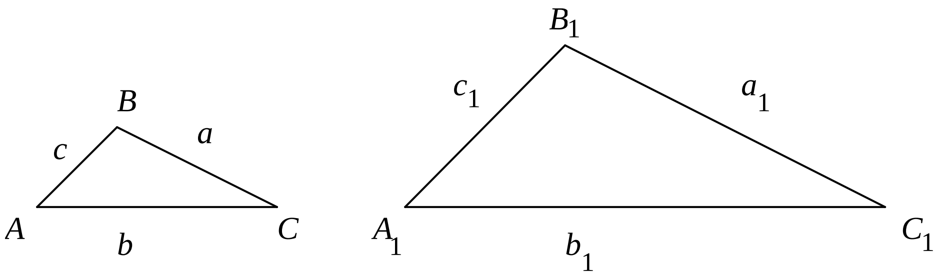
2.3 Ensvinklede trekanter

Forestil dig, at du under en vandretur i Norge pludselig står over for en elv, som du ikke tør vade over, fordi strømmen er for stærk, og elven er for dyb. I stedet må du bide i det sure æble og lede efter en bro! I en sådan situation kan man ikke lade være med at tænke på, hvor langt der mon er til den anden side?
Dette problem kan faktisk løses **kun fra den ene flodbred,** blot med 4 kæppe og så lige sætningen om ensvinklede trekanter!

Definition 4 (LS)

To trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ kaldes *ensvinklede*, hvis trekanternes vinkler parvist er ens, dvs.

$$A = A_1 \quad , \quad B = B_1 \quad \text{og} \quad C = C_1 .$$



Her har vi tegnet to ensvinklede trekanter - bemærk at vi har anvendt *standardnotationen* for trekanter, som går ud på at betegne den modstående side til en vinkel med det samme bogstav som vinklen. For at undgå misforståelser bruger man dog det tilsvarende lille bogstav.

Ser man på tegningen, så kunne det se ud som om at den store trekant bare er en forstørret udgave af den lille. Sådan forholder det sig faktisk også - man har nemlig følgende sætning (som vi for en enkelt gangs skyld **ikke** beviser):

Sætning 5 (LS)

Ensvinklede trekanter er *proportionale*, dvs. der findes et tal k, således at følgende ligninger gælder:

$$a_1 = k \cdot a \quad , \quad b_1 = k \cdot b \qquad \text{og} \qquad c_1 = k \cdot c .$$

En anden måde at sige dette på, er at **forholdet mellem ensliggende sider er ens**. Dette forhold k kaldes forstørrelses/formindskelseskonstanten.

.

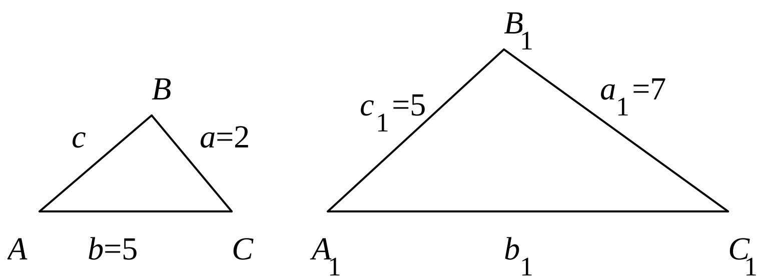
En god måde at tænke på forstørrelses-/formindskelseskonstanten på er som et *målestoksforhold*. Tallet k kan nok ændre på trekantens størrelse, f.eks. ved at forstørre alle længder med 100 (dvs. $k=100$); men k kan ikke ændre på trekantens **form**.

En anden måde at sige dette på, er at **forholdet mellem to sider i en trekant er det samme for alle ensvinklede trekanter**. Vi kan nemlig lave følgende omskrivninger:

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1} \qquad \text{og} \qquad \frac{a_1}{a}=\frac{c_1}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1} \qquad \text{osv.}$$

Regnet opgave

Opgave: Følgende to trekanter er ensvinklede. Bestem længderne af de ukendte sider.



Løsning: Trekanterne er ensvinklede, så de er også proportionale, dvs.

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$$

Indsætter vi de kendte størrelser, så fås

$$\frac{7}{2}=\frac{b_1}{5}=\frac{5}{c}$$

Ved en omrokering af leddene fås altså

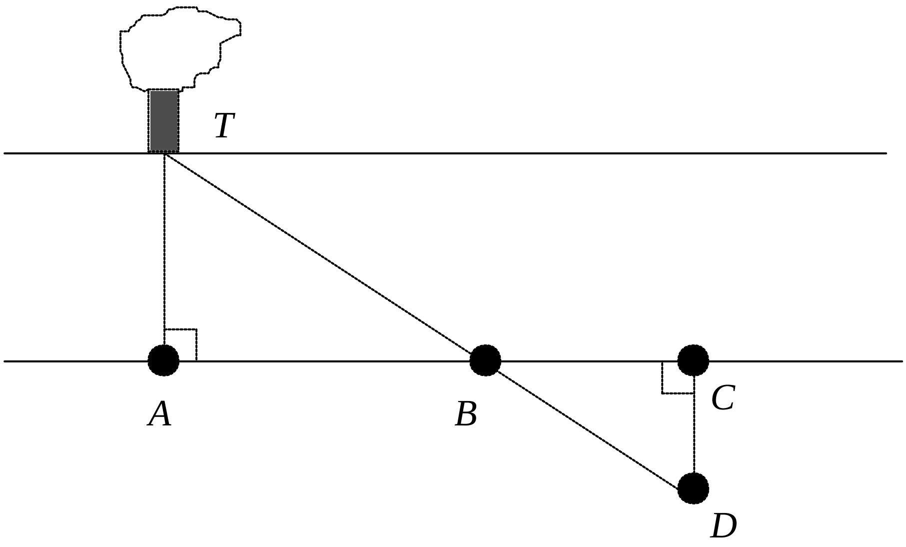
$$b_1=\frac{7}{2}\cdot 5=\frac{35}{2}=17{,}5$$

og

$$c=\frac{2}{7}\cdot 5=\frac{10}{7}\approx 1{,}429$$

Eksempel

Vi kan nu afsløre, hvordan du kan finde bredden af den norske elv:



Find dig et kendetegn på den anden side af floden - f.eks. et træ *T*. Stil dig lige overfor træet og stik en kæp i jorden i punktet *A*. Gå et stykke hen ad elvbredden og stik endnu en kæp i jorden *B*. Gå endnu et stykke hen ad jorden til punktet *C*, og stik den tredie kæp i jorden. Gå nu væk fra elvbredden vinkelret på denne - på et tidspunkt vil du kunne se træet *T* og den anden kæp *B* være på linie med dig selv. Dette er punktet *D*, hvor du også stikker en kæp ned. Mål afstandene $|AB|$, $|BC|$ og $|CD|$.

Kig lidt på tegningen og overbevis dig selv om, at trekanterne ΔTAB og ΔBCD faktisk er ensvinklede. Men så er de også proportionale, og derfor gælder

$$\frac{|TA|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad |TA| = \frac{|CD| \cdot |AB|}{|BC|}$$

Så på denne måde kan du altså finde bredden $|TA|$ af elven.

På den 3. Norgesekspedition i 1904 anvendte den kendte polarforsker J. Norman Iversen denne metode til at måle bredden af den hidtil ukendte *Ulveelv*. Han brugte dog et elsdyrskranie i stedet for et træ. Han målte:

$$|AB| = 70\,\text{m} \qquad |BC| = 2{,}3\,\text{m} \qquad |CD| = 6{,}4\,\text{m}.$$

Ulveelven er altså

$$|KA| = \frac{|CD| \cdot |AB|}{|BC|} = \frac{6{,}4\,\text{m} \cdot 70\,\text{m}}{2{,}3\,\text{m}} = 194{,}8\,\text{m} \text{ bred.}$$

Vi skal nu kigge lidt på *kongruente* trekanter:

Definition 6

To trekanter, som har alle sider og vinkler parvist lige store, kaldes *kongruente*.

Dette er altså matematikerens måde at sige på, at to trekanter er ens.

I mange situationer er det rart at vide, om to trekanter er kongruente uden nødvendigvis at skulle sammenligne alle par af sider og vinkler - måske kender man dem ikke alle sammen.

Sætningerne nedenunder er såkaldte *entydighedssætninger*. De siger alle sammen, at givet visse egenskaber hos en trekant, så findes der kun én trekant, som faktisk har disse egenskaber. Og det er jo det samme som at sige, at hvis man har to trekanter med disse egenskaber, så er de kongruente.

Sætning 7 (Kongruenssætningerne)

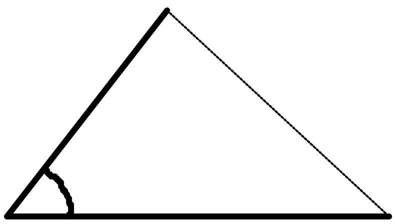
To trekanter er kongruente, hvis de har

♥) En vinkel og de to hosliggende sider parvis lige store,
♦) En side og de to hosliggende vinkler parvis lige store,
♠) Alle tre sider parvis lige store,
♣) En side, en hosliggende og en modstående vinkel parvis lige store.

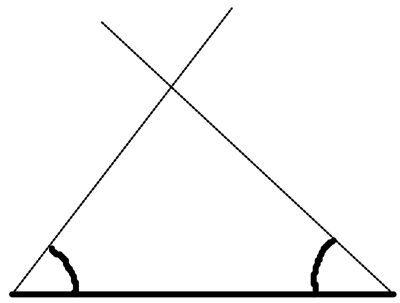
Bevis:

Alle fire beviser går ud på at se, at der kun er én måde at *konstruere* en trekant med de givne egenskaber på. Man taler derfor om et konstruktionsbevis!

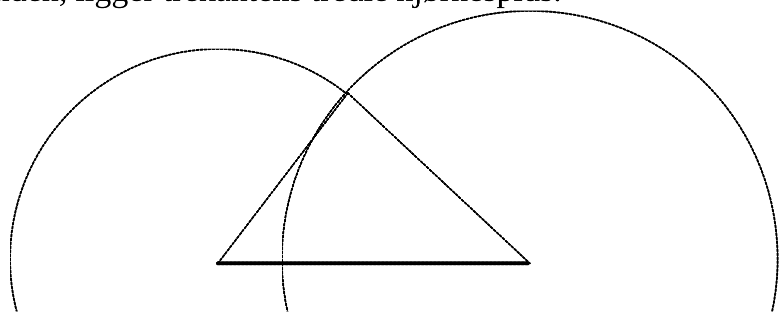
♥) Tegn vinklen og de to hosliggende sider. Konstatér, at der er én og kun én måde at indtegne den sidste side på, således at der dannes en trekant.



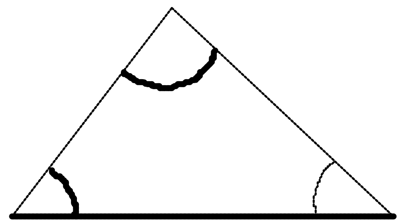
♦) Tegn liniestykket og de to vinkler. Som det ses af figuren, vil de to vinklers frie ben ved forlængelse skære hinanden ét og kun ét sted.



♠) Tegn det ene liniestykke, og tegn en cirkel i hver ende af liniestykket. Den ene cirkels radius skal være lig længden af side nummer 2, og den anden cirkels radius lig længden af side nummer 3. Dér, hvor cirklerne skærer hinanden, ligger trekantens tredie hjørnespids.



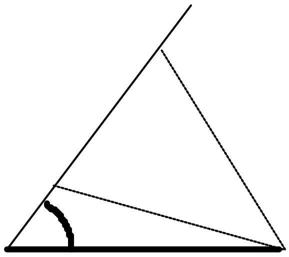
♣) Dette bevis er lidt snyd... Man skynder sig at beregne den sidste vinkel i trekanten, hvilket jo er let nok, idet vinkelsummen er 180°. Og efter dette opdager man, at man er tilbage i tilfælde ♦), hvor det jo var let nok at tegne trekanten.



Indenfor den klassiske geometri taler man om de 5½ trekantstilfælde (det ½ tilfælde er vist lidt af en vittighed). Et *trekantstilfælde* er en situation, hvor man skal konstruere en trekant ud fra kendskab til 3 af trekantens *stykker*. Et stykke i en trekant er enten en vinkel eller en side.

I 4 af trekantstilfældene - nemlig dem i sætning 6 - kan man netop konstruere én trekant med de givne stykker.

I det 5. trekantstilfælde skal man konstruere en trekant ud fra en vinkel, en hosliggende og en modstående side. Det viser sig, at der bliver *to* muligheder:



Man starter med at tegne vinklen og den hosliggende side.

Fra den anden ende af den modstående side kan man normalt tegne to liniestykker, som har den krævede længde - på figuren er dette de to stiplede liniestykker.

(Naturligvis kan man være heldig, således at der kun kan tegnes et stiplet liniestykke. Og naturligvis kan man være uheldig, således afstanden mellem den modstående og den hosliggende side er større end den tredie side, således at der slet ikke kan konstrueres en trekant.)

Denne situation vil optræde igen om nogle sider. Der vil vi kalde den *sinus-fælden*!

Det sidste (og sjette) trekantstilfælde er egentligt slet ikke noget tilfælde. Her drejer det sig om at kunne konstruere en trekant ud fra kendskab til de tre vinkler i trekanten. Som vi ved fra sætning 4, så er alle ensvinklede trekanter proportionale, til dette 6. trekantstilfælde er der faktisk *uendeligt mange løsninger* - nemlig alle mulige små og store udgaver af en trekant med de tre opgivne vinkler.

Opgaver

1.L Konstruér trekanten *ABC* med de givne mål. Vinkler afsættes med en vinkelmåler:

a) $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$

b) $A = 40°$, $b = 5$, $c = 10$

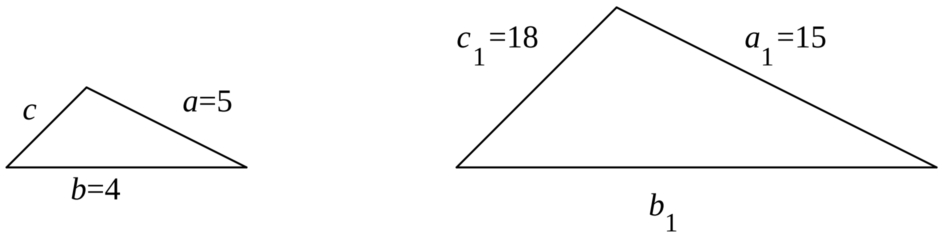
c) $A = 25°$, $B = 35°$, $c = 8$

d) $A = 50°$, $B = 70°$, $a = 6$

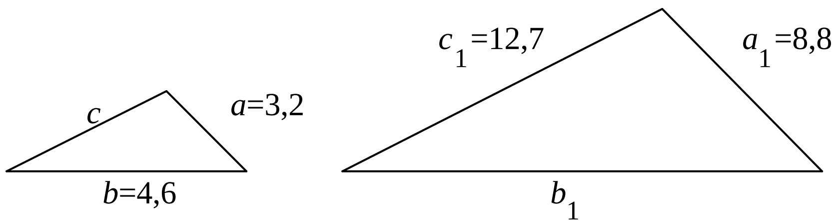
e) $A = 30°$, $a = 10$, $c = 12$ (2 muligheder)

2.L Nedenfor er nogle af siderne i to par af ensvinklede trekanter angivet. Bestem de ukendte sider:

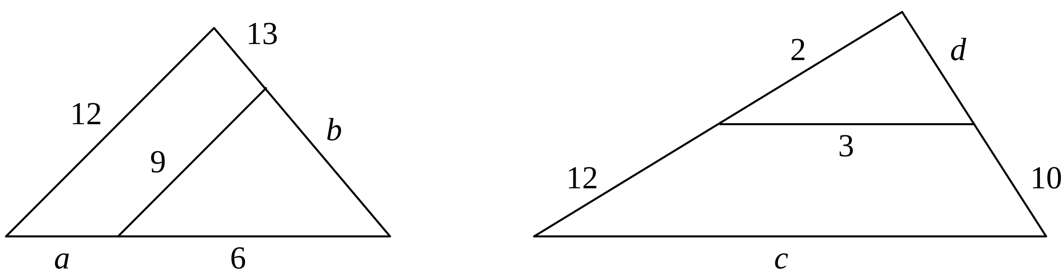
a)



b)



3.L Nedenfor er der tegnet to par ensvinklede trekanter. Bestem længderne af siderne *a, b, c* og *d*.



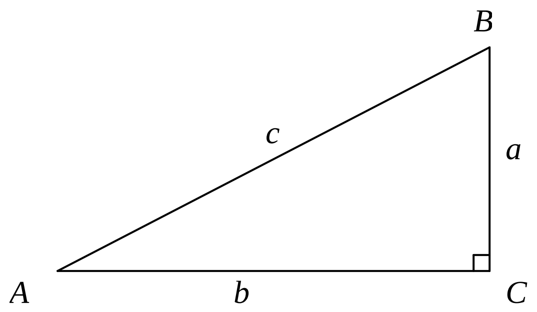
2.4 Retvinklede trekanter

En trekant kaldes retvinklet, hvis den har en vinkel på 90°. I en retvinklet trekant kaldes den lange side for *hypotenusen*, og de to andre sider for *kateterne*.

Pythagoras var en græsk matematiker og filosof, der levede omkring 530 fvt. i Grækenland og Syditalien, som det tidspunkt var koloniseret af grækerne. Nedenstående sætning 8 er opkaldt efter Pythagoras; men det er helt sikkert ikke ham, der har fundet på den - både ægypterne, kineserne og babylonerne (i det nuværende Irak) har kendt og anvendt denne sætning mere end tusind år før Pythagoras. Måske er Pythagoras den første, som har **bevist** sætningen.

Sætning 8 (Pythagoras) (FS)

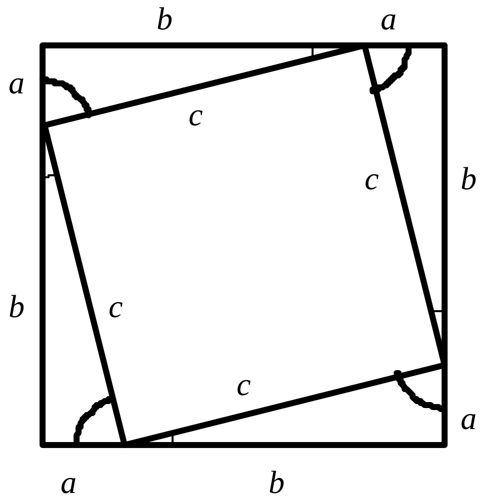
I en retvinklet trekant er summen af kvadraterne på kateterne lig kvadratet på hypotenusen.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis:

Betragt følgende figur:



Figuren er konstrueret ved at tage 4 kopier af den retvinklede trekant (med siderne a, b og c). Som det ses, får man to kvadrater, et stort med sidelængden $a+b$ og et lille med sidelængden c. Det er ikke helt indlysende, at rhomben i midten er et kvadrat; men de fire vinkler er rette.

Dette kan ses ved at observere, at sidevinklen i rhomben er lig 180° minus de to vinkler i det retvinklede trekant - og dette giver jo 90°.

Strategien i beviset er at udregne arealet af det store kvadrat på to forskellige måder. Arealet må jo være det samme, uanset hvilken metode vi anvender.

1. måde: Arealet af et kvadrat med sidelængden $a+b$ er jo $(a+b)^2$.

2. måde: Det store kvadrat består af 4 kopier af den retvinklede firkant og kvadratet med sidelængde *c*. Arealet af en trekant er $\frac{1}{2}ab$, idet grundlinien er a og højden b. Arealet af det lille kvadrat er c^2. Arealet af det store kvadrat er derfor $4\cdot\frac{1}{2}ab+c^2=2ab+c^2$.

Men de to arealer må jo være ens:

$$(a+b)^2=2ab+c^2$$

$\Downarrow$.

$$a^2+b^2+2ab=2ab+c^2$$

$\Downarrow$.

$$a^2+b^2=c^2.$$

Regnede opgaver

Opgave: En retvinklet trekant har katete-længderne 3 og 4. Bestem længden af hypotenusen.

Løsning: Vi anvender betegnelserne på figuren..

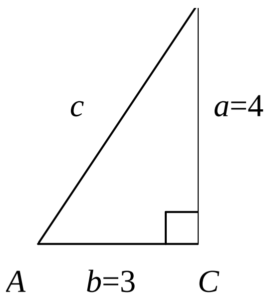
$$c^2=a^2+b^2$$

$\Downarrow$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

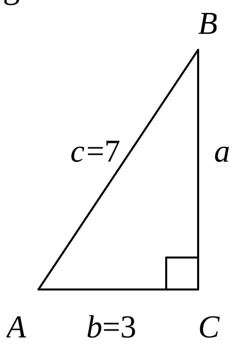
$\Downarrow$

$$c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$


c
a=4
A
b=3
C

Opgave: En retvinklet trekant har en katete med længden 3 og en hypotenuse med længden 7. Bestem længden af den anden katete.

Løsning:



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\Downarrow$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$\Downarrow$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$\Downarrow$$
$$a = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$$

Vi skal nu til at bevise den *omvendte* sætning af Pythagoras' sætning. Hvad menes der egenligt med dette?

Lad os tage ud på landet og besøge fåreavler K. Hansen, som bor tæt ved sin fødeby Kølvrå i Midtjylland. Efter mange års intensive matematik-studier er fåreavler Hansen blevet i stand til at bevise sætningen:

Alle Hansens får er hvide.

En dag er fåreavler Hansen ude på engen. Uheldigvis taber han sine briller (han er nærsynet), så det eneste, han kan se, er klatter af forskellig størrelse og farve. Pludselig ser har en hvid klat komme løbene hen over engen. Fåreavler Hansen kaster sig over, og fanger, denne hvide klat. Kan fåreavler Hansen være sikker på, at det indfangne dyr er et får?
Nej - ovenstående sætning kan ikke bruges her! Fåreavler Hansen mangler nemlig den omvendte sætning:

Alle de hvide dyr, Hansen ejer, er får.

Hvis Hansen ikke ved, at denne omvendte sætning gælder, så kunne det hvide, indfangne dyr faktisk være en hvid hyrdehund, eller en hvid ged, eller noget helt tredie.
Tilbage til matematikbøgerne, hr. fåreavler Hansen!

En tilsvarende situation har vi med Pythagoras' sætning. Her kigger vi også på trekanter, som måske/måske ikke er retvinklede, og som måske/måske ikke opfylder ligningen $a^2 + b^2 = c^2$.

Pythagoras' sætning siger, at **hvis** en trekant er retvinklet, **så** opfylder den ligningen $a^2 + b^2 = c^2$.

Omvendt Pythagoras siger, at **hvis** en trekant opfylder ligningen $a^2 + b^2 = c^2$, **så** er den retvinklet.

Man kan også vise forskellen ved brug af medføre-pile:

Pythagoras: Trekanten er retvinklet $\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$

Omvendt Pythagoras: Trekanten er retvinklet $\Leftarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$.

Endelig kan man kombinere de to sætninger til

Trekanten er retvinklet $\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$

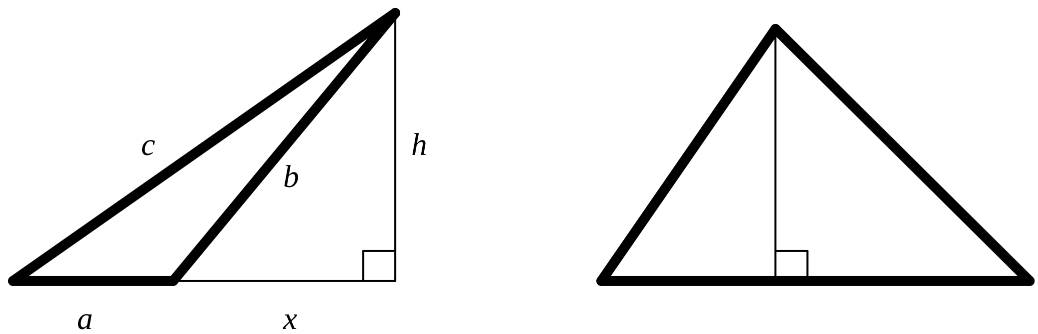
Ensbetydende-pilen $\Leftrightarrow$ kan nemlig opfattes som en sammensmeltning af de to medføre-pile $\Rightarrow$ og $\Leftarrow$.

Sætning 9 (Omvendt Pythagoras) (FS)

En trekant, hvori summen af kvadraterne på to af sidelængderne er lig kvadratet på den tredie sidelængde, er en retvinklet trekant.

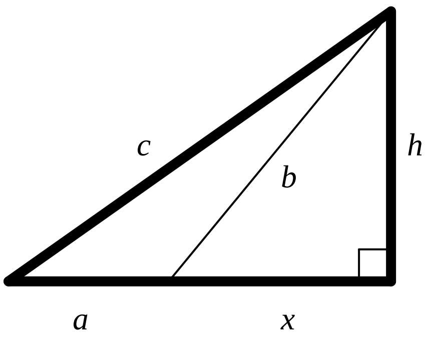
Bevis:

Vi deler beviset op i to tilfælde, alt efter om trekantens højde falder udenfor eller indenfor trekanten:

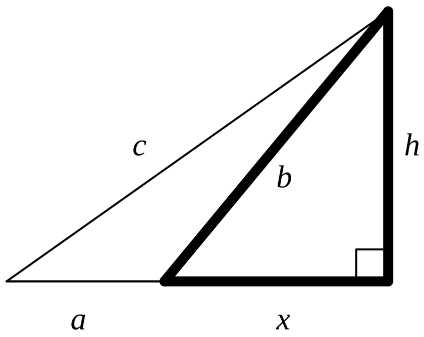


Vi viser kun sætningen for den *venstre* trekantstype. Den anden går ligeså!

Vi har altså en trekant, som opfylder ligningen $a^2 + b^2 = c^2$. Vi anvender Pythagoras på de to retvinklede trekanter på figuren nedenfor:



$$c^2 = (a+x)^2 + h^2$$
$$\Updownarrow$$
$$h^2 = c^2 - (a+x)^2$$



$$b^2 = x^2 + h^2$$
$$\Updownarrow$$
$$h^2 = b^2 - x^2$$

Vi har altså

$$h^2 = c^2 - (a+x)^2 \qquad \text{og} \qquad h^2 = b^2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 - (a+x)^2 = b^2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 - (a^2 + x^2 + 2ax) = b^2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 - a^2 - x^2 - 2ax = b^2 - x^2$$
$$\Downarrow$$
$$c^2 - a^2 - b^2 = 2ax$$

Men vi har jo antaget, at $a^2 + b^2 = c^2$, så venstresiden af ligningen er 0. Ergo må

$$0 = 2ax$$

hvilket kun kan ske, hvis enten a eller x er 0.

Men a er en side i en trekant og er derfor ikke 0. Derfor må x være lig 0, og trekanten er derfor retvinklet.

Opgaver

1.L Nedenfor er angivet nogle af stykkerne i nogle trekanter. Hvilke er retvinklede?
(Advarsel: Det er ikke sikkert, at C er ret, eller at c er hypotenusen).

a) $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$
b) $a = 12$, $b = 14$, $c = 20$
c) $a = \sqrt{19}$, $b = \sqrt{13}$, $c = \sqrt{32}$
d) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 3$
e) $a = 4$, $b = \sqrt{14}$, $c = \sqrt{45}$
f) $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$
g) $A = 90°$, $b = 6$, $c = 12$
h) $B = 30°, C = 60°, c = 2$

2.M Bevis sætning 9 (omvendt Pythagoras) i det tilfælde, hvor trekantens højde falder indenfor trekanten.

3.L I nedenstående tabel er angivet længderne af de to kateter (a og b) og længden af hypotenusen (c), i en retvinklet trekant. Desværre er én af de tre størrelser ikke opgivet. Din opgave er at beregne den manglende størrelse:

a	b	c
10	8	
	8	14
45		234
6,7	7,2	
	19,1	23,4
8,3	9,2	
19,23	11,0	
3	4	
24,6	13,2	
	0,03	0,07

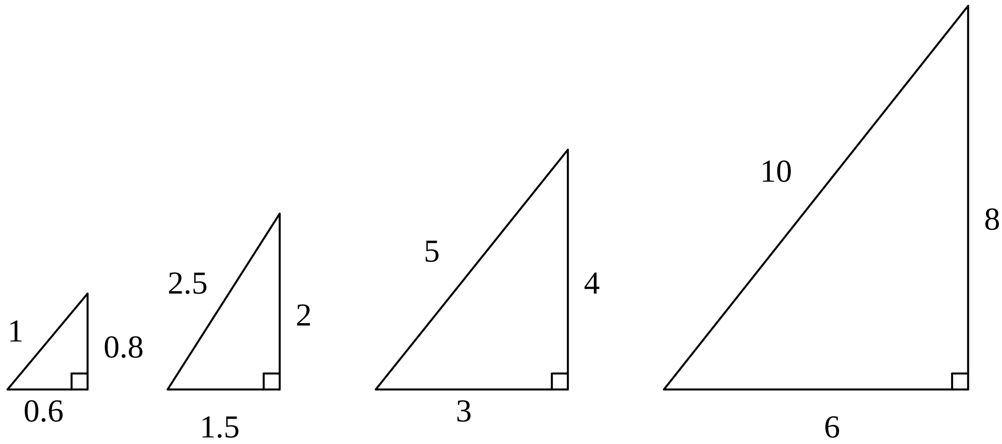
4.L En gal videnskabsmand påstår at have opdaget en retvinklet trekant med en hypotenuse med længden 22 cm. Den ene katete er 34 cm lang.

Har den gale videnskabsmand ret?

2.5 Sinus, cosinus og tangens

Vi kommer nu til det centrale indenfor trigonometrien - definitionen af de *trigonometriske funktioner*: sinus, cosinus og tangens.

Betragt følgende retvinklede og ensvinklede trekanter:



Alle trekanterne er ensvinklede, så forholdet mellem to sider i trekanterne er altid ens ifølge sætning 4:

$$\frac{0.8}{1}=\frac{2}{2.5}=\frac{4}{5}=\frac{8}{10} \qquad \frac{0.6}{1}=\frac{1.5}{2.5}=\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \qquad \frac{0.8}{0.6}=\frac{2}{1.5}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$$

Forholdet mellem siderne i en retvinklet trekant er åbenbart uafhængigt af, om trekanten er forstørret op eller ej. Faktisk afhænger disse forhold kun af vinklerne i trekanten.

De vi skal bruge disse forhold mellem siderne i en retvinklet trekant igen og igen, så døber vi disse på følgende måde:

Definition 10

En *standardtrekant* er en retvinklet trekant med hypotenusen 1.

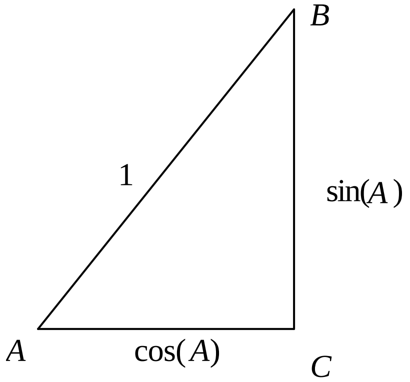
Definition 11

I en standardtrekant med vinklen A kaldes siderne følgende:

$$\cos(A) = \text{længden af den hosliggende katete}$$

$$\sin(A) = \text{længden af den modstående katet}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{længden af den modstående katete}}{\text{længden af den hosliggende katete}} = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$



En standardtrekant har således altid udseendet som til venstre

Iøvrigt:

sin er en forkortelse af *sinus*.

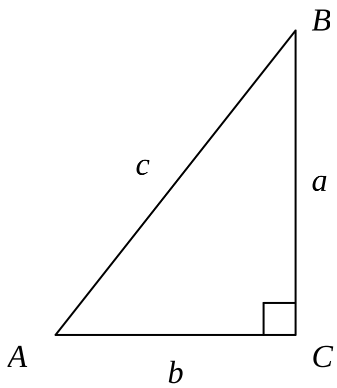
cos er en forkortelse af *cosinus*.

tan er en forkortelse af *tangens*.

Sætning 12 (FS)

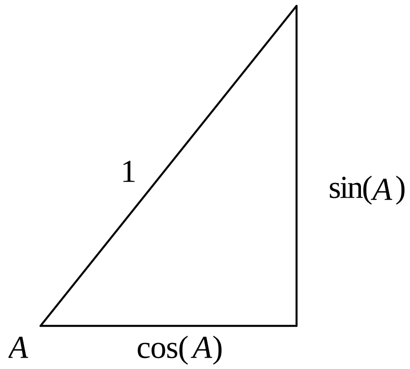
I en retvinklet trekant gælder følgende:

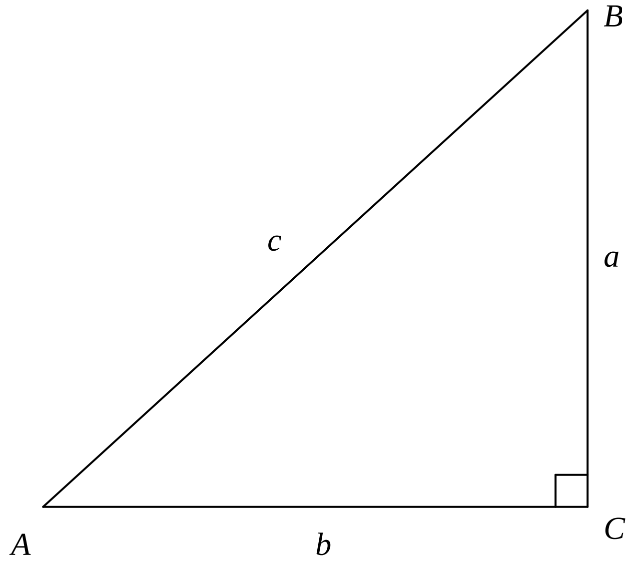
$$\cos(A) = \frac{b}{c} \qquad \sin(A) = \frac{a}{c} \qquad \tan(A) = \frac{a}{b}$$



Bevis:

Vi sammenligner trekanten *ABC* med en standardtrekant med vinklen *A*:



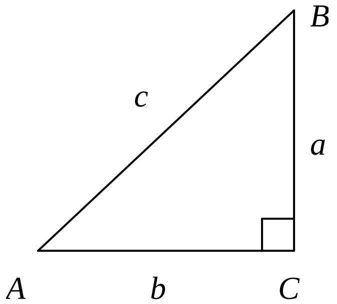


Idet de to trekanter er ensvinklede, så må forholdet mellem tilsvarende sider være ens:

$$\frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\cos(A)}{1} = \frac{b}{c}$$
$$\frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\sin(A)}{1} = \frac{a}{c}$$
$$\frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}} = \frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{a}{b}$$

Det smarte ved dette er, at lommeregneren har indbyggede sinus- cosinus- og tangens-tabeller. Man kan således styre samtlige retvinklede trekanter kun ved brug af sin lommeregner!

Eksempel



En retvinklet trekant med

$$A = 40° \qquad c = 4$$

De ukendte stykker kan nu beregnes:

$$B = 90° - A$$

$$B = 90° - 40° = 50°$$

Ved kateterne skal man have sving i sin og cos:

$$\cos(A) = \frac{b}{c} \qquad\qquad \sin(A) = \frac{a}{c}$$

$$\Downarrow. \qquad\qquad \Downarrow.$$

$$b = c \cdot \cos(A) \qquad\qquad a = c \cdot \sin(A)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$b = 4 \cdot \cos(40°) \approx 3{,}064 \qquad\qquad a = 4 \cdot \sin(40°) \approx 2{,}571$$

På din lommeregner skal du indtaste følgende:

TI-30X (og de fleste andre):

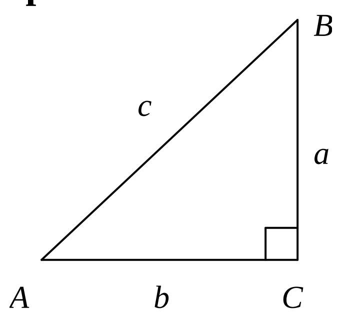
b:	4	x	40	cos	=
a:	4	x	40	sin	=

TI-68

b:	4	x	cos	40	=
a:	4	x	sin	40	=

I begge tilfælde får man et facit med temmeligt mange cifre. Som altid er reglen: Skal du bruge resultatet senere (i andre beregninger), så brug *alle* cifre - f.eks. ved at gemme resultatet i en hukommelse på lommeregneren. Men er det slutresultatet, så pas på antallet af cifre i facittet. Her er der tale om længder, og som sådan er 4 betydende cifre mere end rigeligt.

Eksempel



Endnu en retvinklet trekant - denne gang med

$$A = 40° \qquad a = 5$$

Vi får

$$B = 90° - 40° = 50°$$

og

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \qquad\qquad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

$$\Downarrow. \qquad\qquad \Downarrow.$$

$$c = \frac{a}{\sin(A)} \qquad\qquad b = \frac{a}{\tan(A)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$c = \frac{5}{\sin(40°)} \approx 7{,}778 \qquad\qquad b = \frac{5}{\tan(40°)} \approx 5{,}959$$

På lommeregneren skal man taste

TI-30

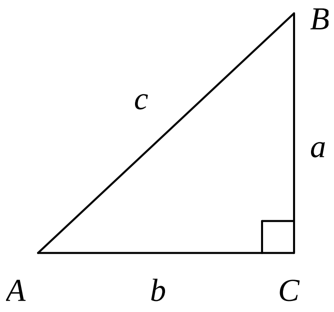
c:	4	$\boxed{\div}$	40	$\boxed{\text{sin}}$	$\boxed{=}$
b:	4	$\boxed{\div}$	40	$\boxed{\text{tan}}$	$\boxed{=}$

TI-68

c:	4	$\boxed{\div}$	$\boxed{\text{sin}}$	40	$\boxed{=}$
b:	4	$\boxed{\div}$	$\boxed{\text{tan}}$	40	$\boxed{=}$

Endelig kan man komme i den situation, at man kender sinus (eller cosinus eller tangens) til en vinkel, men ikke vinklen selv. Her skal man bruge de *omvendte trigonometriske funktioner*:

Eksempel



En retvinklet trekant med

$$a = 7 \qquad c = 9$$

De manglende stykker findes ved brug af trigonometrien og Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\Downarrow.$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$\Downarrow$$
$$b = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} \approx 5,657$$

$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$
$$\Downarrow.$$
$$A = \arcsin(\frac{a}{c})$$
$$\Downarrow$$
$$A = \arcsin(\frac{7}{9}) \approx 51,06°$$

$$\cos(B) = \frac{a}{c}$$
$$\Downarrow.$$
$$B = \arccos(\frac{a}{c})$$
$$\Downarrow$$
$$B = \arccos(\frac{7}{9}) \approx 38,94°$$

På lommeregneren:

TI-30X

b:	9	$\boxed{x^2}$	$\boxed{-}$	7	$\boxed{x^2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\sqrt{x}}$	
A:	7	$\boxed{\div}$	9	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{2nd}}$	$\boxed{\text{sin}}$		$\boxed{=}$
B:	7	$\boxed{\div}$	9	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{2nd}}$	$\boxed{\text{cos}}$		$\boxed{=}$

TI-68

b:	$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$	$\boxed{(}$	9	$\boxed{x^2}$	$\boxed{-}$	7	$\boxed{x^2}$	$\boxed{)}$
A:	$\boxed{\text{inv}}$	$\boxed{\text{sin}}$	$\boxed{(}$ 7		$\boxed{\div}$	9	$\boxed{)}$	$\boxed{=}$
B:	$\boxed{\text{inv}}$	$\boxed{\text{cos}}$	$\boxed{(}$ 7		$\boxed{\div}$	9	$\boxed{)}$	$\boxed{=}$

De omvendte trigonometriske funktioner har mange navne:

$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x) = \text{INV}\sin(x) = \ldots$$
$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x) = \text{INV}\cos(x) = \ldots$$
$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x) = \text{INV}\tan(x) = \ldots$$

Sætning 13

Lad v være en vinkel mellem 0° og 90°. Så gælder

$$\sin(v) \le 1 \qquad \text{og} \qquad \cos(v) \le 1$$

Bevis:

Dette bevis er simpelt nok - i en standardtrekant med vinklen v, og som jo har hypotenusen med længden 1 og kateterne med længderne $\sin(v)$ og $\cos(v)$, er hypotenusen den længste side.

Dette betyder, at man ikke kan tage arcsin og arccos af tal, som er større end 1 - prøv selv. På mange måder minder dette om det velkendte faktum, at man ikke kan tage kvadratroden af negative tal. Til gengæld kan man proppe alt muligt ind i arctan.

sin, cos og tan kan godt beregnes for vinkler, som er større end 90° - og lommeregneren gør det uden brok... Vi vil dog vente et par hæfter med at forklare, hvorledes f.eks. sin(135°) defineres.

Der findes mange formler involverende de trigonometriske funktioner. Vi vil her bevise to og vente med resten.

Den første formel kaldes traditionelt *idiotformlen* - åbenbart fordi den var så let at bevise, at selv en idiot kunne forstå det. I sætningen optræder nogle lidt mystiske symboler: $\sin^2 v$ og $\cos^2 v$. Dette betyder

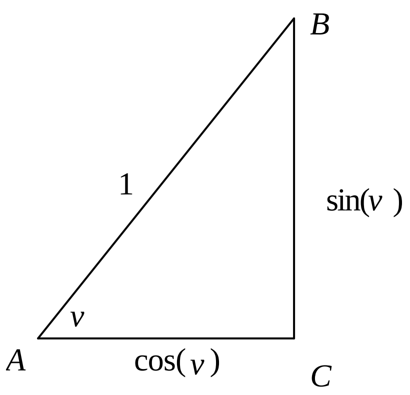
$$\sin^2 v = (\sin v)^2 = \left(\sin(v)\right)^2$$

Man har anvendt denne notation for at skelne det fra $\sin(v^2)$.

Sætning 14 (Idiotformlen) (FS)

For en vinkel v gælder $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$

Bevis:



Betragt standardtrekanten til venstre:

Hypotenusen har længden 1, medens de to kateter har længderne cos*v* og sin*v*. Anvender vi Pythagoras' på dette, så ses, at

$$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1^2$$

eller skrevet lidt pænere

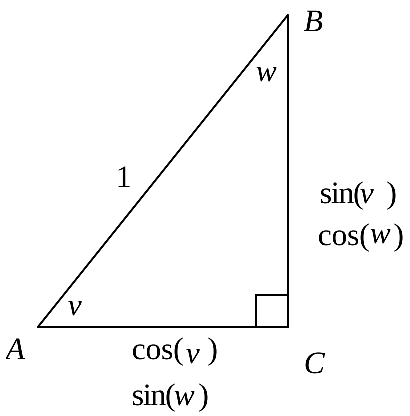
$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Sætning 15 (FS)

For en vinkel v gælder formlerne

$$\sin(v) = \cos(90° - v) \qquad \text{og}$$
$$\cos(v) = \sin(90° - v).$$

Bevis:



Trekanten til højre kan opfattes på to måder: Som en standardtrekant med vinklen v eller som en standardtrekant med vinklen $w = 90° - v$. Kateternes længde må jo være uafhængig af, hvordan man opfatter trekanten, så

$$|BC| = \sin(v) = \cos(w) = \cos(90° - v)$$

og

$$|AC| = \cos(v) = \sin(w) = \sin(90° - v)$$

Opgaver

1.L En måde at finde forskellige trigonometriske størrelser på er at tegne en standardtrekant med det ønskede vinkelmål og ganske simpelt måle kateterne. Det skal du gøre for nogle udvalgte trekanter. Det er en god idé at lade hypotenusen være f.eks. 10 cm lang - det bliver mere nøjagtigt.
Altså: Udfyld nedenstående skema vha. nogle passende tegninger

v	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$

Sammenlign med lommeregnerens resultater.

2.L Formålet med denne opgave er give dig øvelse i at bruge lommeregneren. Du skal beregne følgende tal med 4 decimaler:

a)	$\cos 30° + \cos 40°$	b)	$\cos(30° + 40°)$
c)	$\sin(20°) \cdot \sin(2°)$	d)	$\sin(2 \cdot 20°)$
e)	$\sqrt{\tan(40°)}$	f)	$\tan(\sqrt{40}°)$
g)	$\sin^2(15°) + \cos^2(15°)$	h)	$[\sin(15°) + \cos(15°)]^2$
i)	$[\sin(15°)]^2 + [\cos(15°)]^2$	j)	$\sin(15^2) + \cos(15^2)$

3.L I nedenstående trekant er angivet nogle stykker i den retvinklede trekant ΔABC. Bestem de manglende stykker:

a	*b*	*c*	*A*	*B*	*C*
	12		27°		90°
10		13			90°
	22			47°	90°
50	25				90°
32			75°		90°
		10	36°		90°
	20	35			90°

4.L I nedenstående trekant er angivet nogle stykker i den retvinklede trekant ΔABC . Bestem de manglende stykker. Bemærk, at man ikke som i opgave 3 kan være sikker på, at der er vinkel *C*, som er ret!

a	*b*	*c*	*A*	*B*	*C*
	12,57		90°	63°	
9	12			90°	
	6		29°	90°	
	10		90°	75°	
		17,84		34°	90°
3	5	4			
13	12	5			

6. Sinus- og cosinus-relationerne

Vi skal nu se på, hvordan man kan beregne vinkler og sider i en generel trekant (altså en trekant, som ikke er retvinklet).

Her støder vi med det samme ind i et problem - vi har kun defineret sin, cos og tan for vinkler mellem 0° og 90°. Uheldigvis har generelle trekanter jo mulighed for at have vinkler mellem 90° og 180°. Vi udvider derfor definitionen af sin, cos og tan på følgende måde:

Definition 16 (FS)

Lad v være en vinkel mellem 90° og 180°. Vi definerer da

$$\sin(v) = \sin(180° - v)$$
$$\cos(v) = -\cos(180° - v)$$
$$\tan(v) = -\tan(180° - v)$$

Vi vil ikke begrunde denne definition hér, men vente til et senere hæfte.

Den første formel, vi vil bevise, er

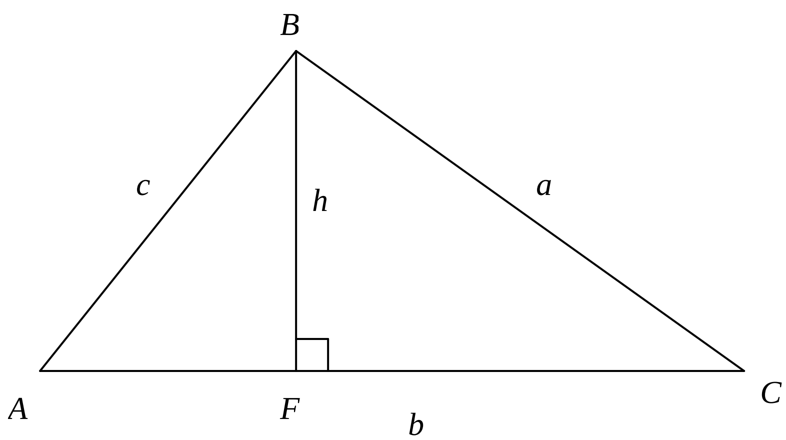
Sætning 17 (sinus-relationerne) (FS)

For en vilkårlig trekant gælder

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Bevis:

Vi beviser kun sætningen i det tilfælde, hvor højden falder **indenfor** trekanten - se opgave 6.1.



Indtegn højden h fra B ned på siden b. Højdens fodpunkt kaldes F.

ΔABF er retvinklet, så:

$$\sin(A) = \frac{h}{c}$$

$\Downarrow$.

$$h = c \cdot \sin(A)$$

ΔBCF er retvinklet, så:

$$\sin(C) = \frac{h}{a}$$

$\Downarrow$.

$$h = a \cdot \sin(C)$$

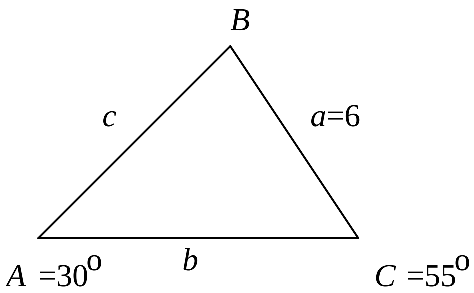
Sættes disse to ligninger lig hinanden, så fås

$$c\sin(A) = a\sin(C) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

Ved brug af højden fra A til a kan man tilsvarende få, at

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{b}{\sin(B)}.$$

Eksempel:



En trekant med de kendte stykker

$$A = 30° \quad C = 55° \quad a = 6$$

Vinkel B findes

$$B = 180° - A - C = 95°$$

Sinus-relationerne bruges til b og c:

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

$\Downarrow$.

$$b = a \cdot \frac{\sin(B)}{\sin(A)}$$

$\Downarrow$

$$b = 6 \cdot \frac{\sin(95°)}{\sin(30°)} = 11{,}95$$

og

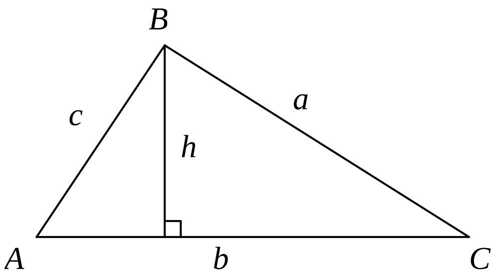
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$
$\Downarrow$.
$$c = a \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(A)}$$
$\Downarrow$
$$c = 6 \cdot \frac{\sin(55^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 9{,}83$$

Beslægtet med sinus-relationerne er følgende areal-formler:

Sætning 18 (FS)

Arealet T af en vilkårlig trekant er givet ved
$$T = \tfrac{1}{2}ab\sin(C) = \tfrac{1}{2}ac\sin(B) = \tfrac{1}{2}bc\sin(A)$$

Bevis:



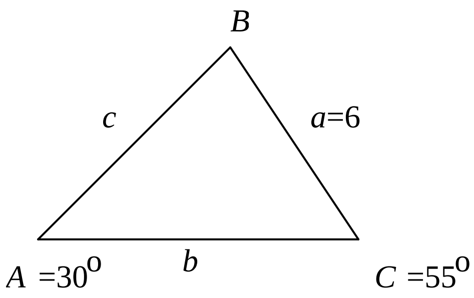
Da $\sin(A) = \frac{h}{c}$ gælder

$$T = \tfrac{1}{2}hb$$
$\Downarrow$
$$T = \tfrac{1}{2}bc\sin(A)$$

Tilsvarende for de to andre arealformler.

•

Eksempel



Vi vil finde arealet af trekanten fra det foregående eksempel. Her er det fristende bare at tage de *afrundede* værdier for b og c og proppe ind i arealformlen - men det er forkert!

Man skal enten tage de værdier, lommeregneren gav (med alle 117 decimaler), eller man skal regne eksakt:

$$T = \tfrac{1}{2}ab\sin(C) = \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\frac{\sin(B)}{\sin(A)}\cdot\sin(C) =$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sin(95°)}{\sin(30°)}\sin(55°) = 29{,}37725724 \approx 29{,}38$$

Forsøger man at beregne arealet med de afrundede værdier b=11,95 og c=9,83, så får man arealet til at være

$$T = \tfrac{1}{2}bc\sin(A) = \tfrac{1}{2}\cdot 11{,}95\cdot 9{,}83\cdot\sin(30°) = 29{,}36$$

Som man ser, er der en vis forskel mellem de to resultater!

Vi har set, at sinus-relationerne er ganske nyttige; men de kan dog ikke bruges til alt. Sinus-relationerne kræver nemlig, at man kender en vinkel og dens modstående side, før man kan komme i gang. Kender man en vinkel, men ikke dens modstående side, eller omvendt, så skal man bruge *cosinus-relationerne*:

Sætning 19 (cosinus-relationerne) (FS)

I en vilkårlig trekant gælder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Cosinus-relationerne anvendes ofte omskrevet:

Sætning 20 (cosinus-relationerne) (-FS)

I en vilkårlig trekant gælder

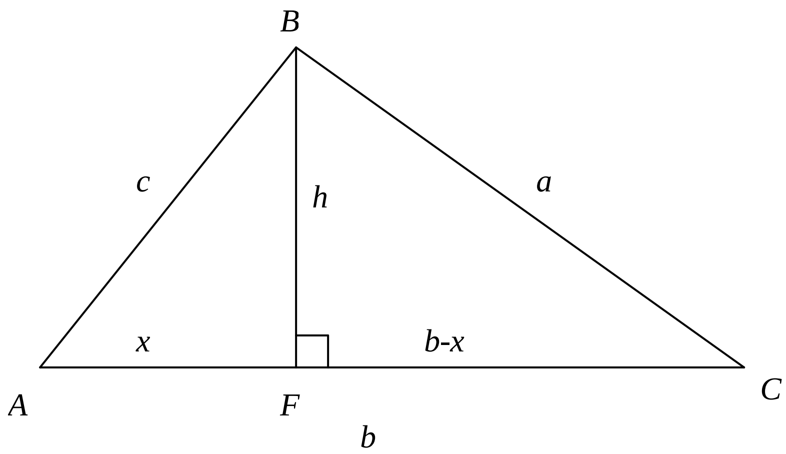
$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Bevis:

Som ved sinus-relationerne beviser vi kun sætningen for trekanter, hvor højden falder indenfor trekanten. Se opgave 6.2 for det andet tilfælde.



Vi tegner højden fra B ned på siden b. Fodpunktet betegnes F, og vi indfører størrelsen $x = |AF|$. Heraf ses, at $|BF| = b - x$.

Pythagoras anvendt på den retvinklede trekant ΔABF giver

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = c^2 - x^2$$

Pythagoras anvendt på den retvinklede trekant ΔBCF giver

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = a^2 - (b-x)^2$$

De to ligninger sættes lig hinanden:

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$$
$\Downarrow$.
$$c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 + x^2 - 2bx)$$
$\Downarrow$.
$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2bx$$
$\Downarrow$.
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Men trekant *ABF* er jo retvinklet, så

$$\cos(A) = \frac{x}{c} \quad \Leftrightarrow \quad x = c\cos(A).$$

Indsættes dette i ligningen ovenfor, så får vi cosinus-relationen:

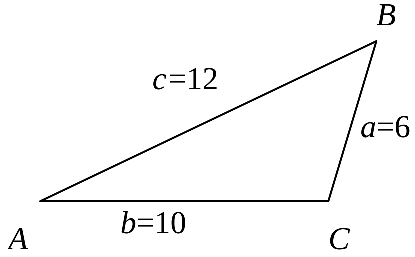
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

•

Regnet opgave

Opgave: Bestem vinklerne i en trekant med sidelængderne 6, 10 og 12.

Løsning: Vi starter med at lave en skitse af trekanten:



Vinklerne findes nu vha. de omskrevne cosinus-relationer:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$\Downarrow$.
$$A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$
$\Downarrow$
$$A = \arccos\left(\frac{10^2 + 12^2 - 6^2}{2 \cdot 10 \cdot 12}\right) = 29{,}93°$$

Tilsvarende beregninger giver $B = 56{,}25°$ og $C = 93{,}83°$.

Vi kan naturligvis kontrollere resultatet ved at finde vinkelsummen:

$$A+B+C=29{,}93°+56{,}25°+93{,}83°=180{,}01°$$

Grunden til, at vi ikke præcist får 180° er naturligvis afrundingerne.

På lommeregnerne ville man indtaste beregningerne af vinkel A således:

TI-30X

$\boxed{(}$ 10 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 12 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 6 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$
$\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{x}$ 10 $\boxed{x}$ 12 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\cos}$

TI-68

$\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(}$ 10 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 12 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$
6 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{x}$ 10 $\boxed{x}$ 12
$\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Man kan også anvende cosinus-relationerne til af beregne sider:

Regnet opgave

Opgave: I trekant ABC er A=30°, b=9 *og* c=8. Beregn længden af siden a.

Løsning: Vi anvender cosinus-relationen på standard-formen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \sqrt{9^2 + 8^2 - 2\cdot 9\cdot 8\cdot \cos(30°)} = 4{,}505$$

TI-30X

9 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ 9

$\boxed{\times}$ 8 $\boxed{\times}$ 30 $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{x}}$

TI-68

$\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{(}$ 9 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 2

$\boxed{\times}$ 9 $\boxed{\times}$ 8 $\boxed{\times}$ $\boxed{\cos}$ 30 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Sinus-fælden

Vi skal nu se på den hyppigste fejl indenfor trigonometrien - *sinus-fælden*. Vi husker fra kapitel 3, at i det 5. trekantstilfælde var der generelt to muligheder for at konstruere en trekant med de givne stykker, som i dette 5. tilfælde var en vinkel, en hosliggende og en modstående side. Lad os prøve at regne lidt på dette:

Vi har altså en trekant, ΔABC, hvor vi kender stykkerne

$$A = 30° \ , \ a = 10 \ , \ c = 12 .$$

Cosinus-relationerne er bedst her - vi ender i en andengradsligning, hvis vi vil finde b, og vi skal senere læse, at en sådan altid har to løsninger. Desværre kan vi ikke løse andengradsligninger. Men sinus-relationerne kan bruges til at finde C:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$\Downarrow$.

$$\sin(C) = \frac{c}{a}\cdot \sin(A)$$

$\Downarrow$

$$\sin(C) = \frac{12}{10} \cdot \sin(30°) = 0,6$$

Det er nu fristende at sige, at

$$C = \arcsin(0,6) = 36,87°$$

men der er altså også en anden mulighed for C:

$$C = 180° - \arcsin(0,6) = 143,13°$$

og vi kan ikke ud fra de givne oplysninger vide, om vi skal bruge den ene eller den anden mulighed...

Morale: Pas på, når du bruger sinus-relationerne til at finde vinkler.

Nu stiller den kvikke læser sig sikkert to spørgsmål:

1) Er der noget, som hedder tangensrelationerne?
Ja, se opgave 23. (Tangensrelationerne bruges næsten aldrig i praksis).

2) Gælder sinus- og cosinus-relationer også for retvinklede trekanter?
Ja, men vi kender dem allerede:

Idet C=90°, så er $\sin(C) = \sin(90°) = 1$ og $\cos(C) = \cos(90°) = 0$. Dette giver

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad \Rightarrow \quad \sin(A) = \frac{a}{c}\sin(C) = \frac{a}{c}$$

altså sætning 12.

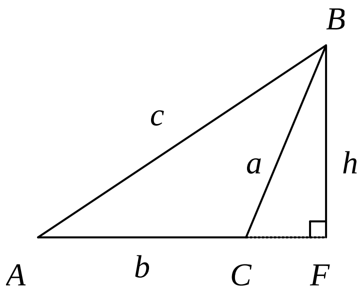
Cosinusrelationerne bliver til

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

altså bare Pythagoras. Cosinusrelationerne kaldes derfor nogen gange *den udvidede Pythagoræiske læresætning*.

Opgaver

1.M



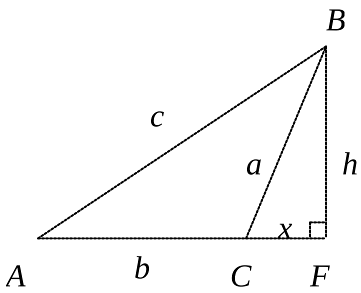
I beviset for sætning 17 tog vi ikke hensyn til det tilfælde, hvor højden falder udenfor trekanten.

Gennemfør beviset i dette tilfælde også. Brug tegningen til venstre.

Du får nok brug for formlen

$$\sin(v) = \sin(180° - v)$$

2.M



I beviset for sætning 19 tog vi ikke hensyn til det tilfælde, hvor højden faldt udenfor trekanten.

Gennemfør beviset i dette tilfælde - det er en god idé at indføre størrelserne $x = |CF|$ og $b + x = |AF|$ - se tegningen til venstre.

3.L Denne opgave er en fortsættelse af regneeksemplet til sinus-fælden. Vi havde ΔABC med A=30°, a=10 og c=12, og vi fandt ud af, at der var to muligheder for C, nemlig C=36,87° eller C=143,13°.

Find B og b i de to tilfælde, og konstruer de to løsningstrekanter.

4.L I nedenstående skema er tre af stykkerne i trekanten ΔABC givet. Beregn de manglende stykker.

a	b	c	A	B	C
5	6	7			
	2	5	130°		
	4	5	64°		
4	5				31°
		20	47°	72°	
17,48	5,31	20,23			
1,372	0,781				39,18°
	234,8	187,3		96,76°	
	5,322	3,441			18,37°
		1636	51,72°		101,25°

5.L Trekant ΔABC har vinklen A=39° og siderne b=8 og c=6.

a) Beregn de ukendte stykker i trekanten.

b) Beregn arealet T af trekanten.

6.L I ΔABC er a=15, B=53° og C=43°.

a) Beregn de ukendte stykker i trekanten.

b) Beregn arealet af trekanten.

7.L Beregn arealet af alle de 10 trekanter i opgave 4. Undgå i videst mulige omfang at anvende stykker, som du selv har udregnet. (Dette kan ikke helt undgås, hvis man er doven...)

8.M Opstil for hvert af de 5½ trekantstilfælde (pånær det halve tilfælde) en procedure til at udregne de manglende stykker. Det er en god idé af holde sig til følgende tommelfingerregler:

1) Brug fortrinsvis cosinus-relationerne til at beregne vinkler med (sinus-fælden!)

2) Sørg for i videst muligt omfang at bruge de stykker, du får opgivet, fremfor stykker, du beregner.

3) Hvis du beregner mere end en vinkel, så brug formlen

$$A + B + C = 180°$$

efter udregningerne er færdige til at kontrollere, om du har regnet rigtigt. (Sinus-fælden kan nogen gange undgås på denne måde...)

Blandede opgaver

1.M En stige, der står op imod en lodret mur danner en vinkel på 20° med muren. Stigens fod er 1,3 m fra muren.

a) Hvor lang er stigen?

b) Hvor højt op ad muren når stigen?

2.M En telefonmast kaster en skygge på 6 m. Solen befinder sig 48° over horisonten. Hvor lang er telefonmasten?

3.M Skyggen af en 1,00 m lang pæl er 1,54 m. Samtidigt er skyggen af en klippe på 60 m. Hvor høj er klippen?

4.M I den retvinklede trekant ΔABC, hvor C er ret, gælder at a/c=0,85. Bestem forholdene b/c og a/b.

5.M I trekant ΔABC er siderne givet ved a=6, b=6 og c=6.

a) Bestem trekantens vinkler.

b) Hvad kaldes trekanten?

6.M I ΔABC er A=B, C=34,8° og b=4.

a) Bestem vinklerne i trekanten.

b) Bestem siderne i trekanten.

c) Hvad kaldes en sådan trekant?

7.M Trekanterne ΔABC og ΔDEF er ensvinklede med a=5 , b=4 , d=10 og f=6. Find de øvrige sider.

8.M Trekant ΔABC er retvinklet med b=8,9 og c=13. (C er ret...)
Bestem de øvrige sider og vinkler i trekanten.

9.M Trekant ΔABC er retvinklet med C ret. Endvidere er a=19 og B=25°.
Bestem de øvrige sider i trekanten samt trekantens areal.

10.M I ΔABC er a=12, b=13 og c=5. Bestem trekantens vinkler.

11.M I ΔABC er a=6. Endvidere er arealet af trekanten lig T=20.
Bestem længden af højden h_a.

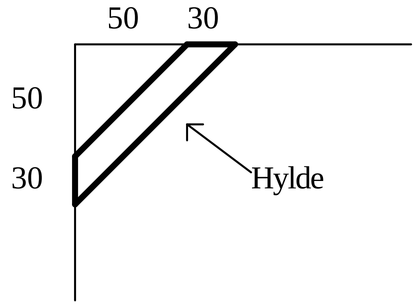
12.M I ΔABC er a=4,14 , b=5,32 og c=16.

a) Bestem trekantens vinkler.

b) Bestem trekantens areal.

c) Bestem længden af de tre højder i trekanten.

13.M Nu er det vist på tide at regne opgaven fra indledningen:



Find hyldens bredde, dens to sidelængder, og vinklen, som de to sider danner med væggen.

14.M I ΔABC er a=4,14, b=5,32 og B=79°. Bestem de øvrige sider og vinkler.

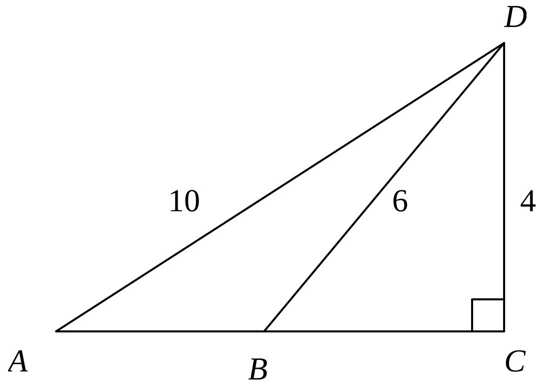
15.M Et rektangel har sidelængderne 12 og 16. Bestem længderne af diagonalerne i rektanglet.

16.S a) Et kvadrat har sidelængden 5. Bestem længden af diagonalerne.
b) Et kvadrat har sidelængden a. Bevis, at diagonalernes længde er givet ved $a\sqrt{2}$.

17.M En af bardunerne, der holder en lodret mast fast, har længden 6,2 m. Vinkelspidsen mellem bardunen og masten er 10°. Hvor høj er masten?

18.M En rhombe (dvs. en firkant, hvori alle siderne er lige lange) har sidelængden 10. Den ene diagonal i rhomben har længden 17.
Bestem længden af den anden diagonal.

19.M



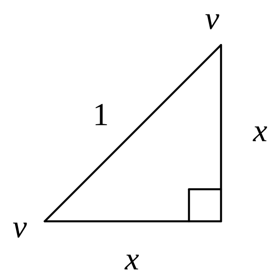
Bestem længden af liniestykket AB samt størrelsen af vinklen $\angle DBC$ på figuren ovenfor.

20.S Eksakte trigonometriske værdier

Når man finder sinus til et gradtal på lommeregneren, så får man normalt kun en tilnærmet værdi ud. Det er sådan set forståeligt, idet de fleste trigonometriske værdier er nogle underlige tal, som det er umuligt at bestemme eksakt. Men i denne opgave vil vi bestemme de eksakte værdier af nogle af de få trigonometriske størrelser, man kan gøre dette for. Faktisk vil vi finde samtlige værdier i nedenstående skema:

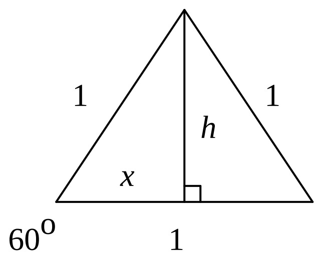
v	$\sin(v)$	$\cos(v)$	$\tan(v)$
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Betragt den retvinklede, ligebenede trekant til højre.



a) Bevis, at vinklen v er 45°.
b) Bestem katetelængden x vha. Pythagoras.
c) Bevis, at $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d) Bestem den eksakte værdi af tallene sin(45°), cos(45°) og tan(45°).

Betragt nu den ligesidede trekant til højre.



e) Bestem længden x.
f) Bestem højden h vha. Pythagoras.
g) Bestem den eksakte værdi af tallene sin(60°), cos(60°) og tan(60°).

h) Bestem den eksakte værdi af sin(30°), cos(30°) og tan(30°). (Vink: 30°=90°-60°)

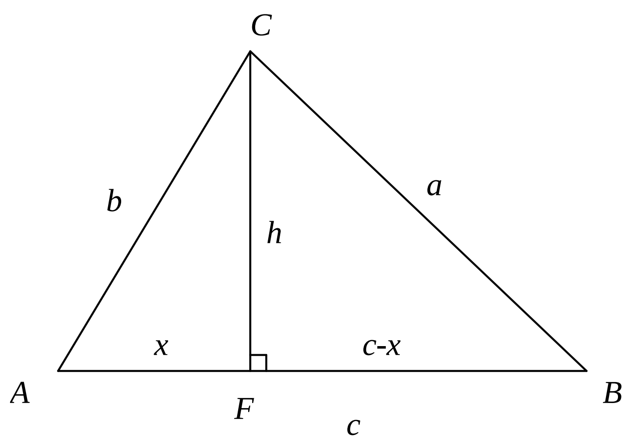
21.M Trekant ΔABC har sidelængderne 2,73 ; 4,56 og 6,03.
a) Bestem de tre vinkler i trekant ΔABC.
b) Bestem længden af de tre medianer i ΔABC.

22.M I ΔABC er A=84°, B=23° og c=23.
a) Beregn længden af vinkelhalveringslinien, som halverer A.
b) Beregn arealet af trekanten.

23.S Tangensrelationerne

Vi skal nu bevise *tangensrelationerne*:

$$\tan(A) = \frac{a\sin(C)}{b - a\cos(C)} = \frac{a\sin(B)}{c - a\cos(B)}$$



a) Bevis, at $\cos(A) = \dfrac{c - a\cos(B)}{b}$.

b) Bevis, at $\sin(A) = \dfrac{a}{b}\sin(B)$.

c) Udled formlen $\tan(A) = \dfrac{a\sin(B)}{c - a\cos(B)}$

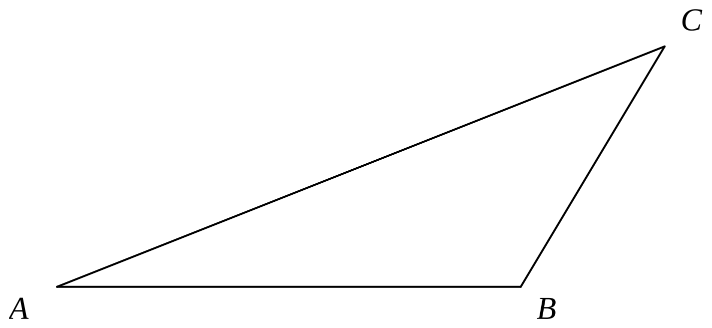
d) En trekant har stykkerne a=27.3 , c=19.4 og B=26°. Bestem A og C vha. tangensrelationerne.

24.M I firkant *ABCD* er $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $|AC| = 7$, $|BD| = 11$ og D=63°.
Beregn de ukendte stykker i firkanten.

25.M I firkant *ABCD* er $|AB| = 5$, $|BC| = 7$, $|AC| = 10$, D=45° og $|AD| = |CD|$.
Beregn de ukendte stykker i firkanten.

26.M I trekant *ABC* er vinkel A=67,34°, $|AC| = 5{,}2$ og $|AB| = 7{,}3$.
Beregn længden af siden *BC* samt vinklerne *B* og *C*.
Beregn trekantens areal.

27.M



Figuren viser en stumpvinklet trekant *ABC*, hvor

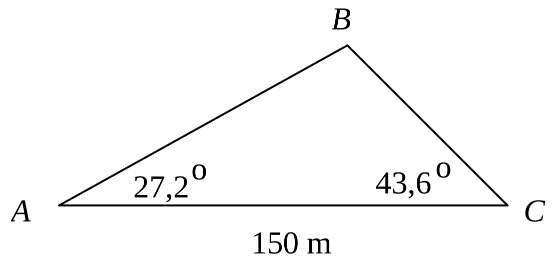
$$\angle A = 21,2° \quad , \quad |BC| = 6,9 \quad , \quad |AC| = 14,2$$

a) Beregn vinklerne *B* og *C*.

b) Beregn længden af liniestykket *AB*.

c) Beregn arealet af trekant *ABC*.

28.M



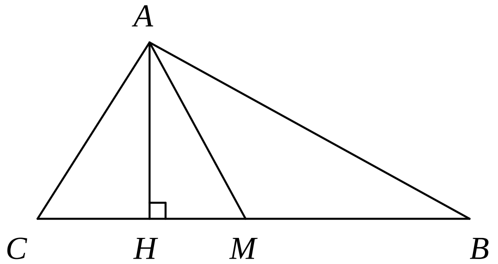
En ballon svæver over en vandret mark i punktet *B*. Fra to punkter *A* og *C* på marken måles vinklen mellem vandret og sigtelinien til *B*.
Afstanden mellem *A* og *C* er 150 m, og gradtallene for de nævnte vinkler er vist på figuren.

Hvor højt er ballonen oppe?

29.M I trekant *ABC* betegner *F* fodpunktet af højden fra *A* på siden *BC*. Det oplyses, at vinkel *C* er 41°, $|AC| = 7,1$ og $|BF| = 1,4$.
Bestem $|CF|$ og $|AF|$.
Bestem de resterende sider og vinkler i trekant *ABC*.

30.M I trekant *ABC* er *A*=68,1°, *B*=51,4° og *a*=70,5.
Besten længden af højden *CH* samt siderne *b* og *c*.

31.M



I en trekant *ABC* er *C*=45°. På siden *BC* ligger punkterne *H* og *M*. Punktet *M* er midtpunkt for *BC*, og punktet *H* er bestemt ved, at $\angle AHC$ er ret. Endvidere er $|AH| = 35$, $|AM| = 37$, og $\angle AMC$ er spids.

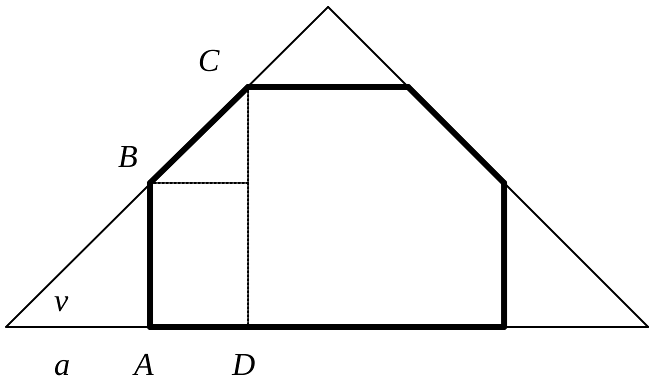
a) Beregn $|HM|$, $|HC|$ og $|MC|$.

b) Beregn sider og vinkler i trekant *ABC*.

32.M I firkant *ABCD* er vinkel *D* ret, vinkel *B* er 120°, $|AB| = |BC| = 7$ og $|CD| = 11$.
Beregn vinklen $\angle BAC$ og længden af diagonalen $|AC|$.
Beregn $|AD|$ samt vinklerne *A* og *C* i firkanten.

33.M I firkant *ABCD* er vinklerne *A* og *C* rette. I trekant *ABD* er vinklen *D* lig 31,2°. Diagonalen *BD* har længden 8,5, og siden *BC* har længden 5,1.
Bestem de ukendte sider og vinkler i firkant *ABCD*.

34.M



Figuren viser et tværsnit af et loftsværelse med skråvægge.
Længden af skråvæggen *BC* er målt til 1,89 m, skunkvæggen *AB* har længden 1,16 m, og højden *CD* i værelset er 2,44 m.

a) Bestem vinklen *v* mellem skråvæg og gulv.

b) Bestem afstanden *a* fra skunkvæggen ud til muren.

Facitliste

Kapitel 1:

2: $(n-2)\cdot 180°$

3a: 200^g , 400^g 3b: π , 2π

3c: Hvis *v* betegner gradtallet, *w* nygradtallet og *x* radiantallet, så

$$w = v \cdot \frac{100^g}{90°} \qquad \text{og} \qquad x = v \cdot \frac{\pi/2}{90°}$$

Kapitel 3:

2a: $b_1 = 12$ *c*=6 2b: $c = 4,618$, $b_1 = 12,65$

3: *a*=8 *b*=9,75 *c*=18 *d*=1,667

Kapitel 4:

1: Trekanterne a, c, d, f, g og h er retvinklede.

3:

a	*b*	*c*
10	8	**12,8062**
11,4891	8	14
45	**229,6323**	234
6,7	7,2	**9,8351**
13,5185	19,1	23,4
8,3	9,2	**12,3907**
19,23	11,0	**22,1538**
3	4	**5**
24,6	13,2	**27,9177**
0,0632	0,03	0,07

4: Nej, hypotenusen er altid den længde side i en retvinklet trekant. Man kan også prøve at beregne den sidste katete.

Kapitel 5:

2: a) 1,6321 b) 0,3420 c) 0,0119 d) 0,6428 e) 0,9160
f) 0,1108 g) 1 h) 1,5000 i) 1 j) -1,4142

3:

a	*b*	*c*	*A*	*B*	*C*
6,1143	12	**13,4679**	27°	**63°**	90°
10	**8,3066**	13	**50,2849°**	**39,7151°**	90°
20,5153	22	**30,0812**	**43°**	47°	90°
50	25	**55,9017**	**63,4349°**	**26,5651°**	90°
32	**8,5748**	**33,1289**	75°	**15°**	90°
5,8779	**8,9092**	10	36°	**54°**	90°
28,7228	20	35	**55,1501°**	**34,8499°**	90°

4:

a	*b*	*c*	*A*	*B*	*C*
14,1076	12,57	**6,4047**	90°	63°	**27°**
9	12	**7,9373**	**48,5904°**	90°	**41,4096°**
2,9089	6	**5,2477**	29°	90°	**61°**
10,3528	10	**2,6795**	90°	75°	**15°**
14,7900	**9,9760**	17,84	**56°**	34°	90°
3	5	4	**36,8699°**	**90°**	**53,1303°**
13	12	5	**90°**	**67,3801°**	**22,6199°**

Kapitel 6:

3: B=113,13° , b=18,39 eller B=6,87° , b=2,39

4:

a	*b*	*c*	*A*	*B*	*C*
5	6	7	**44,4153°**	**57,1217°**	**78,4630°**
6,4696	2	5	130°	**13,6985°**	**36,3015°**
4,8441	4	5	64°	**47,9173°**	**68,0827°**
4	5	**2,5910**	**52,6663°**	**96,3337°**	31°
16,7239	**21,7479**	20	47°	72°	**61°**
17,48	5,31	20,23	**52,1257°**	**13,8740°**	**114,0003°**
1,372	0,781	**0,9117**	**108,0535°**	**32,7665°**	39,18°
121,26	234,8	187,3	**30,8527°**	96,76°	**52,3873°**
8,0554	5,322	3,441	**132,4583°**	**29,1717°**	18,37°
1309,41	**758,06**	1636	51,72°	**27,03°**	101,25°

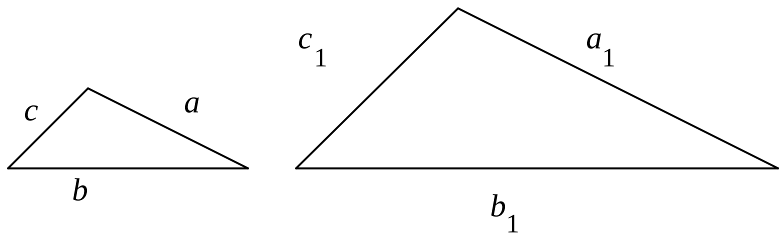
5a: a=5,0392 B=92,4581° C=48,5306° 5b: T=15,1036

6a: A=84° b=12,0455 c=10,2863 6b: T=61,5127

7: Arealerne er i rækkefølge: 14,6969 3,8302 8,9879
501504 159,0537 42,3970 0,3385 11276,68
2,8857 486768,52

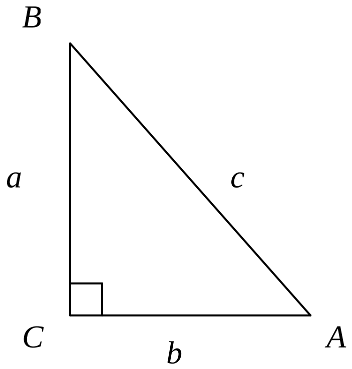
Kapiteloversigt

Ensvinklede trekanter



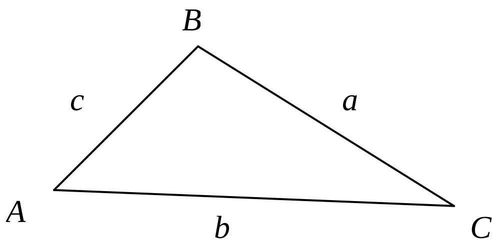
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

Retvinklet trekant



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$
$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$
$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

Vilkårlig trekant



$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$
$$T = \frac{1}{2} ab\sin(C)$$

Trigonometriske formler

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$\sin v = \cos(90° - v)$ $\qquad$ $\cos v = \sin(90° - v)$

$\sin v = \sin(180° - v)$ $\qquad$ $-\cos v = \cos(180° - v)$